

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1

**Ein Lehr- und Arbeitsbuch
für das Grundstudium**

9., verbesserte Auflage

Mit zahlreichen Beispielen
aus Naturwissenschaft und Technik,
485 Abbildungen und 303 Übungsaufgaben
mit ausführlichen Lösungen



Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen	1
1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	3
2 Die Menge der reellen Zahlen	6
2.1 Darstellung der reellen Zahlen und ihrer Eigenschaften	6
2.2 Anordnung der Zahlen, Ungleichung, Betrag	7
2.3 Teilmengen und Intervalle	8
3 Gleichungen	9
3.1 Lineare Gleichungen	10
3.2 Quadratische Gleichungen	10
3.3 Gleichungen 3. und höheren Grades	11
3.3.1 Allgemeine Vorbetrachtung	11
3.3.2 Kubische Gleichungen vom speziellen Typ $ax^3 + bx^2 + cx = 0$	12
3.3.3 Bi-quadratische Gleichungen	12
3.4 Wurzelgleichungen	13
3.5 Betragsgleichungen	14
3.5.1 Definition der Betragsfunktion	15
3.5.2 Analytische Lösung einer Betragsgleichung durch Fallunterscheidung (Beispiel)	17
3.5.3 Lösung einer Betragsgleichung auf halb-graphischem Wege (Beispiel)	18
4 Ungleichungen	18
5 Lineare Gleichungssysteme	21
5.1 Ein einführendes Beispiel	21
5.2 Der Gaußsche Algorithmus	24
5.3 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes	33
6 Der Binomische Lehrsatz	35

Übungsaufgaben	39
Zu Abschnitt 1 und 2	39
Zu Abschnitt 3	39
Zu Abschnitt 4	40
Zu Abschnitt 5	41
Zu Abschnitt 6	42
 II Vektoralgebra	43
1 Grundbegriffe	43
1.1 Definition eines Vektors	43
1.2 Gleichheit von Vektoren	44
1.3 Parallele, anti-parallele und kollineare Vektoren	45
1.4 Vektoroperationen	46
1.4.1 Addition von Vektoren	46
1.4.2 Subtraktion von Vektoren	49
1.4.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	50
 2 Vektorrechnung in der Ebene	52
2.1 Komponentendarstellung eines Vektors	52
2.2 Darstellung der Vektoroperationen	56
2.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	56
2.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	57
2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	59
2.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	59
2.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	62
2.4 Ein Anwendungsbeispiel: Resultierende eines ebenen Kräftesystems	65
 3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum	67
3.1 Komponentendarstellung eines Vektors	68
3.2 Darstellung der Vektoroperationen	72
3.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	72
3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren	73
3.3 Skalarprodukt zweier Vektoren	76
3.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes	76
3.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren	79
3.3.3 Richtungswinkel eines Vektors	80
3.3.4 Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor	82
3.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Arbeit einer Kraft	84
3.4 Vektorprodukt zweier Vektoren	86
3.4.1 Definition und Berechnung eines Vektorproduktes	86
3.4.2 Anwendungsbeispiele	92

3.4.2.1 Drehmoment (Moment einer Kraft)	92
3.4.2.2 Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld (Lorentz-Kraft)	93
3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)	94
4 Anwendungen in der Geometrie	98
4.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden	98
4.1.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden	98
4.1.2 Zwei-Punkte-Form einer Geraden	100
4.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden	101
4.1.4 Abstand zweier paralleler Geraden	103
4.1.5 Abstand zweier windschiefer Geraden	105
4.1.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	107
4.2 Vektorielle Darstellung einer Ebene	109
4.2.1 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene	109
4.2.2 Drei-Punkte-Form einer Ebene	112
4.2.3 Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Vektor	114
4.2.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene	115
4.2.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene	117
4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	119
4.2.7 Abstand zweier paralleler Ebenen	122
4.2.8 Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen	124
Übungsaufgaben	128
Zu Abschnitt 2 und 3	128
Zu Abschnitt 4	132
III Funktionen und Kurven	137
1 Definition und Darstellung einer Funktion	137
1.1 Definition einer Funktion	137
1.2 Darstellungsformen einer Funktion	138
1.2.1 Analytische Darstellung	138
1.2.2 Darstellung durch eine Wertetabelle (Funktionstafel)	138
1.2.3 Graphische Darstellung	138
1.2.4 Parameterdarstellung einer Funktion	140
2 Allgemeine Funktionseigenschaften	141
2.1 Nullstellen	141
2.2 Symmetrieverhalten	142
2.3 Monotonie	144
2.4 Periodizität	147
2.5 Umkehrfunktion oder inverse Funktion	148

3 Koordinatentransformationen	152
3.1 Ein einführendes Beispiel	152
3.2 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	153
3.3 Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten	158
3.3.1 Definition der Polarkoordinaten	158
3.3.2 Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten	161
4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	163
4.1 Reelle Zahlenfolgen	163
4.1.1 Definition und Darstellung einer reellen Zahlenfolge	163
4.1.2 Grenzwert einer Folge	165
4.2 Grenzwert einer Funktion	168
4.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$	168
4.2.2 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$	171
4.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte	173
4.3 Stetigkeit einer Funktion	174
5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	179
5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion	179
5.2 Konstante und lineare Funktionen	180
5.3 Quadratische Funktionen	183
5.4 Polynomfunktionen höheren Grades	187
5.5 Horner-Schema und Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion	191
5.6 Interpolationspolynome	195
5.6.1 Allgemeine Vorbetrachtung	195
5.6.2 Interpolationspolynom von Newton	196
5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Biegelinie eines Balkens	200
6 Gebrochenrationale Funktionen	200
6.1 Definition einer gebrochenrationalen Funktion	200
6.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole	201
6.3 Asymptotisches Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen	206
6.4 Ein Anwendungsbeispiel: Kapazität eines Kugelkondensators	208
7 Potenz- und Wurzelfunktionen	209
7.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	209
7.2 Wurzelfunktionen	211
7.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	213
7.4 Ein Anwendungsbeispiel: Beschleunigung eines Elektrons in einem elektrischen Feld	215

8 Algebraische Funktionen	215
8.1 Definition einer algebraischen Funktion	215
8.2 Gleichungen der Kegelschnitte	217
8.2.1 Darstellung eines Kegelschnitts durch eine algebraische Gleichung 2. Grades	217
8.2.2 Gleichungen eines Kreises	218
8.2.3 Gleichungen einer Ellipse	219
8.2.4 Gleichungen einer Hyperbel	221
8.2.5 Gleichungen einer Parabel	224
8.2.6 Beispiele zu den Kegelschnitten	225
8.3 Ein Anwendungsbeispiel: Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems	230
9 Trigonometrische Funktionen	231
9.1 Definitionen und Grundbegriffe	231
9.2 Sinus- und Kosinusfunktion	236
9.3 Tangens- und Kotangensfunktion	237
9.4 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	238
9.5 Anwendungen in der Schwingungslehre	240
9.5.1 Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	240
9.5.1.1 Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	240
9.5.1.2 Harmonische Schwingung eines Federpendels	244
9.5.2 Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm	246
9.5.3 Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen	252
9.5.4 Lissajous-Figuren	257
10 Arkusfunktionen	258
10.1 Das Problem der Umkehrung trigonometrischer Funktionen	258
10.2 Arkussinusfunktion	259
10.3 Arkuskosinusfunktion	260
10.4 Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	261
10.5 Trigonometrische Gleichungen	265
11 Exponentialfunktionen	267
11.1 Grundbegriffe	267
11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion	267
11.3 Spezielle, in den Anwendungen häufig auftretende Funktionstypen	269
11.3.1 Abklingfunktionen	269
11.3.2 Sättigungsfunktionen	273
11.3.3 Darstellung aperiodischer Schwingungsvorgänge durch e-Funktionen	275
11.3.4 Gauß-Funktionen	277

12 Logarithmusfunktionen	278
12.1 Grundbegriffe	278
12.2 Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion	280
12.3 Exponential- und Logarithmusgleichungen	284
13 Hyberbel- und Areafunktionen	286
13.1 Hyperbelfunktionen	286
13.1.1 Definition der Hyperbelfunktionen	286
13.1.2 Die Hyperbelfunktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$	286
13.1.3 Die Hyperbelfunktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$	288
13.1.4 Wichtige Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen	289
13.2 Areafunktionen	290
13.2.1 Definition der Areafunktionen	290
13.2.2 Die Areafunktionen $y = \operatorname{arsinh} x$ und $y = \operatorname{arcosh} x$	291
13.2.3 Die Areafunktionen $y = \operatorname{artanh} x$ und $y = \operatorname{arcoth} x$	292
13.2.4 Darstellung der Areafunktionen durch Logarithmusfunktionen	293
13.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	293
Übungsaufgaben	295
Zu Abschnitt 1	295
Zu Abschnitt 2	296
Zu Abschnitt 3	296
Zu Abschnitt 4	297
Zu Abschnitt 5	299
Zu Abschnitt 6	301
Zu Abschnitt 7	301
Zu Abschnitt 8	302
Zu Abschnitt 9 und 10	302
Zu Abschnitt 11, 12 und 13	305
IV Differentialrechnung	308
1 Differenzierbarkeit einer Funktion	308
1.1 Das Tangentenproblem	308
1.2 Ableitung einer Funktion	309
1.3 Ableitung der elementaren Funktionen	313
2 Ableitungsregeln	316
2.1 Faktorregel	316
2.2 Summenregel	317
2.3 Produktregel	318

2.4	Quotientenregel	320
2.5	Kettenregel	322
2.6	Logarithmische Ableitung	327
2.7	Ableitung der Umkehrfunktion	328
2.8	Implizite Differentiation	330
2.9	Differential einer Funktion	332
2.10	Höhere Ableitungen	335
2.11	Ableitung einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) ..	336
2.12	Anstieg einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve	339
2.13	Einfache Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	344
2.13.1	Bewegung eines Massenpunktes (Geschwindigkeit, Beschleunigung)	344
2.13.2	Induktionsgesetz	346
2.13.3	Elektrischer Schwingkreis	347
3	Anwendungen der Differentialrechnung	348
3.1	Tangente und Normale	348
3.2	Linearisierung einer Funktion	350
3.3	Charakteristische Kurvenpunkte	353
3.3.1	Geometrische Vorbetrachtungen	353
3.3.2	Relative oder lokale Extremwerte	355
3.3.3	Wendepunkte, Sattelpunkte	360
3.3.4	Ergänzungen	362
3.4	Extremwertaufgaben	364
3.5	Kurvendiskussion	370
3.6	Näherungsweise Lösung einer Gleichung nach dem Tangentenverfahren von Newton	375
3.6.1	Iterationsverfahren	375
3.6.2	Tangentenverfahren von Newton	376
Übungen	aufgaben	383
	Zu Abschnitt 1	383
	Zu Abschnitt 2	383
	Zu Abschnitt 3	387
V	Integralrechnung	390
1	Integration als Umkehrung der Differentiation	390
2	Das bestimmte Integral als Flächeninhalt	393
2.1	Ein einführendes Beispiel	394
2.2	Das bestimmte Integral	397
3	Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion	403

4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	406
5 Grund- oder Stammintegrale	410
6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion	412
7 Elementare Integrationsregeln	416
8 Integrationsmethoden	419
8.1 Integration durch Substitution	419
8.1.1 Ein einführendes Beispiel	419
8.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen	420
8.2 Partielle Integration oder Produktintegration	426
8.3 Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	432
8.3.1 Partialbruchzerlegung	433
8.3.2 Integration der Partialbrüche	435
8.4 Numerische Integrationsmethoden	439
8.4.1 Trapezformel	440
8.4.2 Simpsonsche Formel	445
9 Uneigentliche Integrale	451
10 Anwendungen der Integralrechnung	456
10.1 Einfache Beispiele aus Physik und Technik	456
10.1.1 Integration der Bewegungsgleichung	456
10.1.2 Biegelinie (elastische Linie) eines einseitig eingespannten Balkens	459
10.1.3 Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes	461
10.2 Flächeninhalt	462
10.2.1 Bestimmtes Integral und Flächeninhalt. Ergänzungen	462
10.2.2 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	468
10.3 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	473
10.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve	479
10.5 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	482
10.6 Arbeits- und Energiegrößen	486
10.7 Lineare und quadratische Mittelwerte	492
10.8 Schwerpunkt homogener Flächen und Körper	496
10.8.1 Grundbegriffe	496
10.8.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	499
10.8.3 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	505
10.9 Massenträgheitsmomente	510
10.9.1 Grundbegriffe und einfache Beispiele	510
10.9.2 Satz von Steiner	514
10.9.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers	515

Übungsaufgaben	520
Zu Abschnitt 1 bis 7	520
Zu Abschnitt 8	523
Zu Abschnitt 9	526
Zu Abschnitt 10	526
 VI Potenzreihenentwicklungen	531
1 Unendliche Reihen	531
1.1 Ein einführendes Beispiel	531
1.2 Grundbegriffe	533
1.2.1 Definition einer unendlichen Reihe	533
1.2.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	535
1.3 Konvergenzkriterien	538
1.3.1 Quotientenkriterium	539
1.3.2 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	542
 2 Potenzreihen	544
2.1 Definition einer Potenzreihe	544
2.2 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe	545
2.3 Eigenschaften der Potenzreihen	551
 3 Taylor-Reihen	552
3.1 Ein einführendes Beispiel	552
3.2 Potenzreihenentwicklung einer Funktion	554
3.2.1 Mac Laurinsche Reihe	554
3.2.2 Taylorsche Reihe	561
3.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen	563
3.3 Anwendungen	565
3.3.1 Näherungspolynome einer Funktion	565
3.3.2 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	576
3.3.3 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital	579
3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes	585
 Übungsaufgaben	588
Zu Abschnitt 1	588
Zu Abschnitt 2	589
Zu Abschnitt 3	589

Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben	594
I Allgemeine Grundlagen	594
Abschnitt 1 und 2	594
Abschnitt 3	594
Abschnitt 4	596
Abschnitt 5	598
Abschnitt 6	599
II Vektoralgebra	600
Abschnitt 2 und 3	600
Abschnitt 4	603
III Funktionen und Kurven	610
Abschnitt 1	610
Abschnitt 2	612
Abschnitt 3	612
Abschnitt 4	613
Abschnitt 5	615
Abschnitt 6	617
Abschnitt 7	619
Abschnitt 8	619
Abschnitt 9 und 10	620
Abschnitt 11, 12 und 13	623
IV Differentialrechnung	625
Abschnitt 1	625
Abschnitt 2	625
Abschnitt 3	632
V Integralrechnung	640
Abschnitt 1 bis 7	640
Abschnitt 8	641
Abschnitt 9	644
Abschnitt 10	645
VI Potenzreihenentwicklungen	649
Abschnitt 1	649
Abschnitt 2	650
Abschnitt 3	651
Literaturhinweise	659
Sachwortverzeichnis	660